

Дифференциальные уравнения высших порядков.

Определение. Дифференциальным уравнением порядка n называется уравнение вида:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

В некоторых случаях это уравнение можно разрешить относительно $y^{(n)}$:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$

Так же как и уравнение первого порядка, уравнения высших порядков имеют бесконечное количество решений.

Определение. Решение $y = \varphi(x)$ удовлетворяет начальным условиям $x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$, если $\varphi(x_0) = y_0, \quad \varphi'(x_0) = y'_0, \quad \dots, \quad \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$.

Определение. Нахождение решения уравнения $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$, удовлетворяющего начальным условиям $x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$, называется **решением задачи Коши**.

Теорема Коши. (Теорема о необходимых и достаточных условиях существования решения задачи Коши).

Если функция $(n-1)$ -й переменных вида $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ в некоторой области D $(n-1)$ - мерного пространства непрерывна и имеет непрерывные частные производные по $y, y', \dots, y^{(n-1)}$, то какова бы не была точка $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)})$ в этой области, существует единственное решение $y = \varphi(x)$ уравнения $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$, определенного в некотором интервале, содержащем точку x_0 , удовлетворяющее начальным условиям $x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$.

Дифференциальные уравнения высших порядков, решение которых может быть найдено аналитически, можно разделить на несколько основных типов.

Рассмотрим подробнее методы нахождения решений этих уравнений.

Уравнения, допускающие понижение порядка.

Понижение порядка дифференциального уравнения – основной метод решения уравнений высших порядков. Этот метод дает возможность сравнительно легко находить решение, однако, он применим далеко не ко всем уравнениям. Рассмотрим случаи, когда возможно понижение порядка.

Уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$.

Если $f(x)$ – функция непрерывная на некотором промежутке $a < x < b$, то решение может быть найдено последовательным интегрированием.

$$\begin{aligned} y^{(n-1)} &= \int f(x) dx + C_1; \\ y^{(n-2)} &= \int f(x) dx + C_1 x + C_2 = \int dx \int f(x) dx + C_1 x + C_2; \\ &\dots \end{aligned}$$

$$y = \int dx \int dx \dots \int f(x) dx + C_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + C_n;$$

Пример. Решить уравнение $y''' = e^{2x}$ с начальными условиями $x_0 = 0$; $y_0 = 1$; $y'_0 = -1$; $y''_0 = 0$.

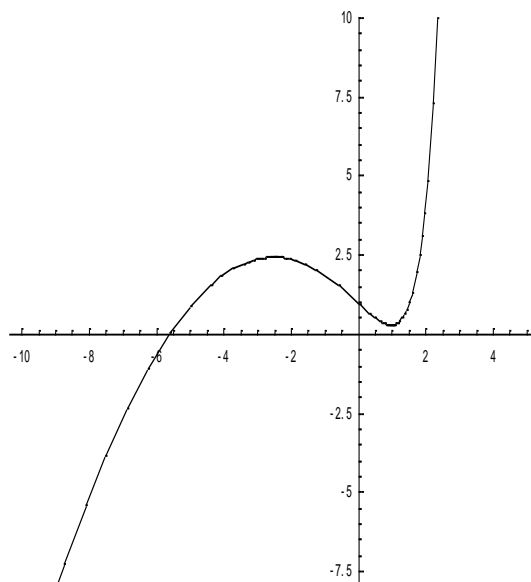
$$\begin{aligned} y'' &= \int e^{2x} dx + C_1 = \frac{1}{2} e^{2x} + C_1; \\ y' &= \int \left(\frac{1}{2} e^{2x} + C_1 \right) dx = \frac{1}{4} e^{2x} + C_1 x + C_2; \\ y &= \int \left(\frac{1}{4} e^{2x} + C_1 x + C_2 \right) dx = \frac{1}{8} e^{2x} + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3; \end{aligned}$$

Подставим начальные условия:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{8} + C_3; \quad -1 = \frac{1}{4} + C_2; \quad 0 = \frac{1}{2} + C_1; \\ C_1 &= -\frac{1}{2}; \quad C_2 = -\frac{5}{4}; \quad C_3 = \frac{7}{8}; \end{aligned}$$

Получаем частное решение (решение задачи Коши): $y = \frac{1}{8} e^{2x} - \frac{1}{4} x^2 - \frac{5}{4} x + \frac{7}{8}.$

Ниже показана интегральная кривая данного дифференциального уравнения.



Уравнения, не содержащие явно искомой функции и ее производных до порядка $k - 1$ включительно.

Это уравнения вида: $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0.$

В уравнениях такого типа возможно понижение порядка на k единиц. Для этого производят замену переменных:

$$y^{(k)} = z; \quad y^{(k+1)} = z'; \quad \dots \quad y^{(n)} = z^{(n-k)}.$$

Тогда получаем: $F(x, z, z', \dots, z^{(n-k)}) = 0$.

Теперь допустим, что полученное дифференциальное уравнение проинтегрировано и совокупность его решений выражается соотношением:

$$z = \psi(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-k}).$$

Делая обратную подстановку, имеем:

$$y^{(k)} = \psi(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-k})$$

Интегрируя полученное соотношение последовательно k раз, получаем окончательный ответ:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n).$$

Пример. Найти общее решение уравнения $y''' = \frac{y''}{x}$.

Применяем подстановку $z = y''$; $z' = y'''$;

$$z' = \frac{z}{x}; \quad \frac{dz}{dx} = \frac{z}{x}; \quad \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}; \quad \int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{x};$$
$$\ln|z| = \ln|x| + \ln C_1; \quad z = C_1 x;$$

Произведя обратную замену, получаем:

$$y'' = C_1 x; \quad y' = \int C_1 x dx = \frac{C_1}{2} x^2 + C_2;$$

$$y = \int \left(\frac{C_1}{2} x^2 + C_2 \right) dx = \frac{C_1}{6} x^3 + C_2 x + C_3;$$

Общее решение исходного дифференциального уравнения:

$$y = Cx^3 + C_2 x + C_3;$$

Отметим, что это соотношение является решением для всех значений переменной x кроме значения $x = 0$.

Уравнения, не содержащие явно независимой переменной.

Это уравнения вида $F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$.

Порядок таких уравнений может быть понижен на единицу с помощью замены переменных $y' = p$.

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} p;$$
$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{dy''}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dy''}{dy} p = \frac{d\left(\frac{dp}{dy} p\right)}{dy} p = \frac{d^2 p}{dy^2} p^2 + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2 p; \text{ и т.д.}$$

Подставляя эти значения в исходное дифференциальное уравнение, получаем:

$$F_1\left(y, p, \frac{dp}{dy}, \dots, \frac{d^{n-1} p}{dy^{n-1}}\right) = 0$$

Если это уравнение проинтегрировать, и $\Phi(y, p, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}) = 0$ - совокупность его решений, то для решения данного дифференциального уравнения остается решить уравнение первого порядка:

$$\Phi(y, y', C_1, C_2, \dots, C_{n-1}) = 0.$$

Пример. Найти общее решение уравнения $yy'' - (y')^2 - 4yy' = 0$.

Замена переменной: $p = y'$; $y'' = \frac{dp}{dy} p$;

$$yp \frac{dp}{dy} - p^2 - 4yp = 0; \quad p \left(y \frac{dp}{dy} - p - 4y \right) = 0;$$

$$1) \ y \frac{dp}{dy} - p - 4y = 0; \quad \frac{dp}{dy} = 4 + \frac{p}{y};$$

Для решения полученного дифференциального уравнения произведем замену переменной:

$$u = \frac{p}{y}.$$

$$u + \frac{du}{dy} y = 4 + u; \quad du = 4 \frac{dy}{y};$$

$$\int du = 4 \int \frac{dy}{y}; \quad u = 4 \ln|y| + 4 \ln C_1; \quad u = 4 \ln|C_1 y|;$$

$$p = 4y \ln|C_1 y|;$$

С учетом того, что $p = \frac{dy}{dx}$, получаем:

$$\frac{dy}{dx} = 4y \ln|C_1 y|; \quad \int \frac{dy}{4y \ln|C_1 y|} = \int dx;$$

$$x = \frac{1}{4} \int \frac{d(\ln|C_1 y|)}{\ln|C_1 y|} = \frac{1}{4} \ln|\ln|C_1 y|| + C_2;$$

Общий интеграл имеет вид: $\ln|\ln|C_1 y|| = 4x + C;$

$$2) \ p = 0; \quad y' = 0;$$

$$y = C;$$

Таким образом, получили два общих решения.

Линейные дифференциальные уравнения высших порядков.

Определение. Линейным дифференциальным уравнением n – го порядка называется любое уравнение первой степени относительно функции y и ее производных $y', y'', \dots, y^{(n)}$ вида:

$$p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = f(x);$$

где p_0, p_1, \dots, p_n – функции от x или постоянные величины, причем $p_0 \neq 0$.

Левую часть этого уравнения обозначим $L(y)$.

$$p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = L(y);$$

Определение. Если $f(x) = 0$, то уравнение $L(y) = 0$ называется **линейным однородным** уравнением, если $f(x) \neq 0$, то уравнение $L(y) = f(x)$ называется **линейным неоднородным** уравнением, если все коэффициенты $p_0, p_1, p_2, \dots, p_n$ – постоянные числа, то уравнение $L(y) = f(x)$ называется **линейным дифференциальным уравнением высшего порядка с постоянными коэффициентами**.

Отметим одно важное свойство линейных уравнений высших порядков, которое отличает их от нелинейных. Для нелинейных уравнений частный интеграл находится из общего, а для линейных – наоборот, общий интеграл составляется из частных. Линейные уравнения представляют собой наиболее изученный класс дифференциальных уравнений высших порядков. Это объясняется сравнительной простотой нахождения решения. Если при решении каких – либо практических задач требуется решить нелинейное дифференциальное уравнение, то часто применяются приближенные методы, позволяющие заменить такое уравнение “близким” к нему линейным.

Рассмотрим способы интегрирования некоторых типов линейных дифференциальных уравнений высших порядков.

Линейные однородные дифференциальные уравнения с произвольными коэффициентами.

Рассмотрим уравнение вида $p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = 0$

Определение. Выражение $p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = L(y)$ называется **линейным дифференциальным оператором**.

Линейный дифференциальный оператор обладает следующими свойствами:

- 1) $L(Cy) = CL(y)$;
- 2) $L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$;

Решения линейного однородного уравнения обладают следующими свойствами:

- 1) Если функция y_1 является решением уравнения, то функция Cy_1 , где C – постоянное число, также является его решением.
- 2) Если функции y_1 и y_2 являются решениями уравнения, то $y_1 + y_2$ также является его решением.

Структура общего решения.

Определение. **Фундаментальной системой решений** линейного однородного дифференциального уравнения n –го порядка на интервале (a, b) называется всякая система n линейно независимых на этом интервале решений уравнения.

Определение. Если из функций y_i составить определитель n – го порядка

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

то этот определитель называется **определителем Вронского**.

(Юзеф Вроньский (1776 – 1853) – польский математик и философ - мистик)

Теорема. Если функции y_1, y_2, \dots, y_n линейно зависимы, то составленный для них определитель Вронского равен нулю.

Теорема. Если функции y_1, y_2, \dots, y_n линейно независимы, то составленный для них определитель Вронского не равен нулю ни в одной точке рассматриваемого интервала.

Теорема. Для того, чтобы система решений линейного однородного дифференциального уравнения y_1, y_2, \dots, y_n была фундаментальной необходимо и достаточно, чтобы составленный для них определитель Вронского был не равен нулю.

Теорема. Если y_1, y_2, \dots, y_n - фундаментальная система решений на интервале (a, b) , то общее решение линейного однородного дифференциального уравнения является линейной комбинацией этих решений.

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n,$$

где C_i – постоянные коэффициенты.

Применение приведенных выше свойств и теорем рассмотрим на примере линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка.

Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка.

Из вышеизложенного видно, что отыскание общего решения линейного однородного дифференциального уравнения сводится к нахождению его фундаментальной системы решений.

Однако, даже для уравнения второго порядка, если коэффициенты p зависят от x , эта задача не может быть решена в общем виде.

Тем не менее, если известно одно ненулевое частное решение, то задача может быть решена.

Теорема. Если задано уравнение вида $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$ и известно одно ненулевое решение $y = y_1$, то общее решение может быть найдено по формуле:

$$y = C_2 y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p_1(x) dx} dx + C_1 y_1.$$

Таким образом, для получения общего решения надо подобрать какое – либо частное решение дифференциального уравнения, хотя это бывает часто довольно сложно.

Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.

Решение дифференциального уравнения вида $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0$ или, короче, $L(y) = 0$ будем искать в виде $y = e^{kx}$, где $k = \text{const}$.

Т.к. $y' = k e^{kx}$; $y'' = k^2 e^{kx}$; ... $y^{(n)} = k^n e^{kx}$, то

$$L(e^{kx}) = e^{kx} (k^n + a_1 k^{n-1} + \dots + a_n).$$

При этом многочлен $F(k) = k^n + a_1 k^{n-1} + \dots + a_n$ называется **характеристическим многочленом** дифференциального уравнения.

Для того, чтобы функция $y = e^{kx}$ являлась решением исходного дифференциального уравнения, необходимо и достаточно, чтобы

$$L(e^{kx}) = 0; \text{ т.е. } e^{kx} F(k) = 0.$$

Т.к. $e^{kx} \neq 0$, то $F(k) = 0$ - это уравнение называется **характеристическим уравнением**.

Как и любое алгебраическое уравнение степени n , характеристическое уравнение $k^n + a_1 k^{n-1} + \dots + a_n = 0$ имеет n корней. Каждому корню характеристического уравнения k_i соответствует решение дифференциального уравнения.

В зависимости от коэффициентов k характеристическое уравнение может иметь либо n различных действительных корней, либо среди действительных корней могут быть кратные корни, могут быть комплексно – сопряженные корни, как различные, так и кратные.

Не будем подробно рассматривать каждый случай, а сформулируем общее правило нахождения решения линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

- 1) Составляем характеристическое уравнение и находим его корни.
- 2) Находим частные решения дифференциального уравнения, причем:
 - а) каждому действительному корню соответствует решение e^{kx} ;
 - б) каждому действительному корню кратности m ставится в соответствие m решений:

$$e^{kx}; \quad x e^{kx}; \quad \dots \quad x^{m-1} e^{kx}.$$

- в) каждой паре комплексно – сопряженных корней $\alpha \pm i\beta$ характеристического уравнения ставится в соответствие два решения:

$$e^{\alpha x} \cos \beta x \text{ и } e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

- г) каждой паре m – кратных комплексно – сопряженных корней $\alpha \pm i\beta$ характеристического уравнения ставится в соответствие $2m$ решений:

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad x e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad \dots \quad x^{m-1} e^{\alpha x} \cos \beta x,$$

$$e^{\alpha x} \sin \beta x, \quad x e^{\alpha x} \sin \beta x, \quad \dots \quad x^{m-1} e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

- 3) Составляем линейную комбинацию найденных решений.

Эта линейная комбинация и будет являться общим решением исходного линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

Пример. Решить уравнение $y''' - y = 0$.

Составим характеристическое уравнение: $k^3 - 1 = 0$;

$$(k-1)(k^2 + k + 1) = 0; \quad k_1 = 1; \quad k^2 + k + 1 = 0;$$

$$D = 1 - 4 = -3; \quad k_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i; \quad k_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i;$$

Общее решение имеет вид:
$$y = C_1 e^x + e^{-\frac{x}{2}} \left[C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right].$$

Пример. Решить уравнение $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$.

Это линейное однородное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами второго порядка. Для нахождения общего решения необходимо отыскать какое-либо частное решение.

Таким частным решением будет являться функция $y_1 = x$.

$$y_1' = 1; \quad y_1'' = 0; \quad 0 - 2x + 2x = 0;$$

Исходное дифференциальное уравнение можно преобразовать:

$$y'' - \frac{2x}{1-x^2} y' + \frac{2y}{1-x^2} = 0.$$

Общее решение имеет вид: $y = C_1 x \int \frac{1}{x^2} e^{\int \frac{2x}{1-x^2} dx} dx + C_2 x;$

$$y = C_1 x \int \frac{e^{-\ln(1-x^2)}}{x^2} dx + C_2 x;$$

$$y = C_1 x \int \frac{dx}{x^2(1-x^2)} + C_2 x; \quad y = C_2 x + C_1 x \int \left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{2(1+x)} \right] dx;$$

$$y = C_2 x + C_1 x \left[-\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \right];$$

Окончательно:
$$y = C_2 x + C_3 x \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C_4;$$

Пример. Решить уравнение $y^{IV} - y = 0$.

Составим характеристическое уравнение: $k^4 - 1 = 0$.

$$(k^2 - 1)(k^2 + 1) = 0; \quad k_1 = 1; \quad k_2 = -1; \quad k_3 = i; \quad k_4 = -i.$$

Общее решение:
$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x.$$

Пример. Решить уравнение $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Характеристическое уравнение: $k^2 - 4k + 4 = 0$; $k_1 = k_2 = 2$.

Общее решение: $y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$.

Пример. Решить уравнение $y'' + 2y' + 5y = 0$.

Характеристическое уравнение: $k^2 + 2k + 5 = 0$; $D = -16$; $k_1 = -1 + 2i$;
 $k_2 = -1 - 2i$.

Общее решение: $y = e^{-x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$.

Пример. Решить уравнение $y''' - 7y'' + 6y' = 0$.

Характеристическое уравнение: $k^3 - 7k^2 + 6k = 0$; $k(k^2 - 7k + 6) = 0$;
 $k_1 = 0$; $k_2 = 1$; $k_3 = 6$;

Общее решение: $y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{6x}$;

Пример. Решить уравнение $y'' - y' - 2y = 0$.

Характеристическое уравнение: $k^2 - k - 2 = 0$; $k_1 = -1$; $k_2 = 2$;

Общее решение: $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$.

Пример. Решить уравнение $y^{IV} - 9y''' = 0$.

Характеристическое уравнение: $k^5 - 9k^3 = 0$; $k^3(k^2 - 9) = 0$;
 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$; $k_4 = 3$; $k_5 = -3$;

Общее решение: $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^{3x} + C_5 e^{-3x}$;

Пример. Решить уравнение $yy'' - y'^2 = 0$.

Это уравнение не является линейным, следовательно, приведенный выше метод решения к нему неприменим.

Понизим порядок уравнения с помощью подстановки $y' = p$.

Тогда $y'' = \frac{dp}{dy} y' = \frac{dp}{dy} p$.

$$y \frac{dp}{dy} p - p^2 = 0; \quad p_1 = 0; \quad y_1 = C_1;$$

$$\frac{y dp}{dy} = p; \quad \frac{dp}{p} = \frac{dy}{y}; \quad \int \frac{dp}{p} = \int \frac{dy}{y}; \quad \ln|p| = \ln|y| + \ln C;$$

$$p = Cy; \quad y' = Cy; \quad \frac{dy}{Cy} = dx; \quad \int \frac{dy}{Cy} = \int dx;$$

$$\frac{1}{C} \ln|Cy| = x + \ln C_2; \quad Cy = e^{Cx} e^{C \ln C_2} = C_3 e^{Cx};$$

Окончательно получаем: $y = C_1 e^{Cx};$

Это выражение будет общим решением исходного дифференциального уравнения. Полученное выше решение $y_1 = C_1$ получается из общего решения при $C = 0$.

Пример. Решить уравнение $3yy'' + y'^2 = 0$.

Производим замену переменной: $y' = p; \quad y'' = \frac{dp}{dy} y' = p \frac{dp}{dy};$

$$3yp \frac{dp}{dy} + p^2 = 0; \quad p_1 = 0; \quad y_1 = C;$$

$$3y \frac{dp}{dy} = -p; \quad \frac{dp}{p} = -\frac{dy}{3y}; \quad \int \frac{dp}{p} = -\frac{1}{3} \int \frac{dy}{y};$$

$$\ln|p| = -\frac{1}{3} \ln|y| + \ln C; \quad p^3 = \frac{C}{y}; \quad y' = C_1 y^{-\frac{1}{3}};$$

$$y^{\frac{1}{3}} dy = C_1 dx; \quad \int y^{\frac{1}{3}} dy = C_1 \int dx; \quad \frac{3}{4} y^{\frac{4}{3}} = C_1 x + C_2;$$

$$y^{\frac{4}{3}} = C_3 x + C_4;$$

Общее решение: $y = (C_3 x + C_4)^{\frac{3}{4}}.$

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с произвольными коэффициентами.

Рассмотрим уравнение вида $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = f(x).$

С учетом обозначения $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = L(x)$ можно записать:

$$L(x) = f(x).$$

При этом будем полагать, что коэффициенты и правая часть этого уравнения непрерывны на некотором интервале (конечном или бесконечном).

Теорема. *Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = f(x)$ в некоторой области есть сумма **любого** его решения и общего решения соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения.*

Таким образом, в соответствии теоремой, для решения линейного неоднородного дифференциального уравнения необходимо найти общее решение соответствующего

однородного уравнения и каким-то образом отыскать одно частное решение неоднородного уравнения. Обычно оно находится подбором.

На практике удобно применять метод **вариации произвольных постоянных**. Для этого сначала находят общее решение соответствующего однородного уравнения в виде:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n = \sum_{i=1}^n C_i y_i;$$

Затем, полагая коэффициенты C_i функциями от x , ищется решение неоднородного уравнения:

$$y = \sum_{i=1}^n C_i(x) y_i;$$

Можно доказать, что для нахождения функций $C_i(x)$ надо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n C_i'(x) y_i = 0 \\ \sum_{i=1}^n C_i'(x) y_i' = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \sum_{i=1}^n C_i'(x) y_i^{(n-1)} = f(x) \end{cases}$$

Пример. Решить уравнение $y'' + y = x - \sin 2x$.

Решаем линейное однородное уравнение $y'' + y = 0$.

$$k^2 + 1 = 0; \quad k_1 = i; \quad k_2 = -i.$$

$$y = e^{\alpha x} (A \cos \beta x + B \sin \beta x); \quad \alpha = 0; \quad \beta = 1;$$

$$y = A \cos x + B \sin x;$$

Решение неоднородного уравнения будет иметь вид:

$$y = A(x) \cos x + B(x) \sin x;$$

Составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} A'(x) \cos x + B'(x) \sin x = 0 \\ -A'(x) \sin x + B'(x) \cos x = x - \sin 2x \end{cases}$$

Решим эту систему:

$$\begin{cases} B'(x) = -A'(x) \frac{\cos x}{\sin x} \\ -A'(x) \sin x - A'(x) \frac{\cos^2 x}{\sin x} = x - \sin 2x \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{-A'(x)}{\sin x} = x - \sin 2x \\ B'(x) = \cos x (x - \sin 2x) \end{cases}$$

Из соотношения $A'(x) = 2 \sin^2 x \cos x - x \sin x$ найдем функцию $A(x)$.

$$\begin{aligned} A(x) &= \int (\sin^2 x \cos x - x \sin x) dx = 2 \int \sin^2 x \cos x dx - \int x \sin x dx = \frac{2}{3} \sin^3 x - \int x \sin x dx = \\ &= \left\{ \begin{aligned} u &= x; \quad dv = \sin x dx; \\ du &= dx; \quad v = -\cos x \end{aligned} \right\} = \frac{2}{3} \sin^3 x + x \cos x - \int \cos x dx = \frac{2}{3} \sin^3 x + x \cos x - \sin x + C_1. \end{aligned}$$

Теперь находим $B(x)$.

$$B(x) = \int x \cos x dx - 2 \int \cos^2 x \sin x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x; \quad dv = \cos x dx; \\ du = dx; \quad v = \sin x; \end{array} \right\} = x \sin x - \int \sin x dx + \frac{2}{3} \cos^3 x =$$

$$= \frac{2}{3} \cos^3 x + x \sin x + \cos x + C_2.$$

Подставляем полученные значения в формулу общего решения неоднородного уравнения:

$$y = \frac{2}{3} \sin^3 x \cos x + x \cos^2 x - \sin x \cos x + C_1 \cos x + \frac{2}{3} \sin x \cos^3 x + x \sin^2 x + \sin x \cos x + C_2 \sin x =$$

$$= \frac{2}{3} \sin x \cos x (\sin^2 x + \cos^2 x) + x (\sin^2 x + \cos^2 x) + C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Окончательный ответ: $y = \frac{1}{3} \sin 2x + x + C_1 \cos x + C_2 \sin x;$

Таким образом, удалось избежать нахождения частного решения неоднородного уравнения методом подбора.

Вообще говоря, метод вариации произвольных постоянных пригоден для нахождения решений любого линейного неоднородного уравнения. Но т.к. нахождение фундаментальной системы решений соответствующего однородного уравнения может быть достаточно сложной задачей, этот метод в основном применяется для неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами.

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.

Уравнения с правой частью специального вида.

Представляется возможным представить вид частного решения в зависимости от вида правой части неоднородного уравнения.

Различают следующие случаи:

I. Правая часть линейного неоднородного дифференциального уравнения имеет вид:

$$f(x) = P(x)e^{\alpha x},$$

где $P(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_m$ - многочлен степени m .

Тогда частное решение ищется в виде:

$$y = x^r e^{\alpha x} Q(x)$$

Здесь $Q(x)$ - многочлен той же степени, что и $P(x)$, но с неопределенными коэффициентами, а r - число, показывающее сколько раз число α является корнем характеристического уравнения для соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения.

Пример. Решить уравнение $y''' - 4y' = x$.

Решим соответствующее однородное уравнение: $y''' - 4y' = 0$.

$$k^3 - 4k = 0; \quad k(k^2 - 4) = 0; \quad k_1 = 0; \quad k_2 = 2; \quad k_3 = -2;$$

$$y = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-2x};$$

Теперь найдем частное решение исходного неоднородного уравнения.

Сопоставим правую часть уравнения с видом правой части, рассмотренным выше.

$$P(x) = x; \quad \alpha = 0.$$

Частное решение ищем в виде: $y = x^r e^{\alpha x} Q(x)$, где $r = 1$; $\alpha = 0$; $Q(x) = Ax + B$.

Т.е. $y = Ax^2 + Bx$.

Теперь определим неизвестные коэффициенты A и B .

Подставим частное решение в общем виде в исходное неоднородное дифференциальное уравнение.

$$y' = 2Ax + B; \quad y'' = 2A; \quad y''' = 0;$$

$$0 - 8Ax - 4B = x; \quad -8A = 1; \quad A = -\frac{1}{8}; \quad B = 0;$$

$$\text{Итого, частное решение: } y = -\frac{x^2}{8}.$$

Тогда общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения:

$$y = -\frac{x^2}{8} + C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-2x}.$$

II. Правая часть линейного неоднородного дифференциального уравнения имеет вид:

$$f(x) = e^{\alpha x} [P_1(x) \cos \beta x + P_2(x) \sin \beta x]$$

Здесь $P_1(x)$ и $P_2(x)$ – многочлены степени m_1 и m_2 соответственно.

Тогда частное решение неоднородного уравнения будет иметь вид:

$$y = x^r e^{\alpha x} [Q_1(x) \cos \beta x + Q_2(x) \sin \beta x]$$

где число r показывает сколько раз число $\alpha + i\beta$ является корнем характеристического уравнения для соответствующего однородного уравнения, а $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ – многочлены степени не выше m , где m – большая из степеней m_1 и m_2 .

Заметим, что если правая часть уравнения является комбинацией выражений рассмотренного выше вида, то решение находится как комбинация решений вспомогательных уравнений, каждое из которых имеет правую часть, соответствующую выражению, входящему в комбинацию.

Т.е. если уравнение имеет вид: $L(y) = f_1(x) + f_2(x)$, то частное решение этого уравнения будет $y = y_1 + y_2$, где y_1 и y_2 – частные решения вспомогательных уравнений

$$L(y) = f_1(x) \text{ и } L(y) = f_2(x)$$

Для иллюстрации решим пример другим способом.

Пример. Решить уравнение $y'' + y = x - \sin 2x$.

Правую часть дифференциального уравнения представим в виде суммы двух функций $f_1(x) + f_2(x) = x + (-\sin x)$.

Составим и решим характеристическое уравнение: $k^2 + 1 = 0$; $k_{1,2} = \pm i$;

1. Для функции $f_1(x)$ решение ищем в виде $y_1 = x^r e^{\alpha x} Q(x)$.

Получаем: $\alpha = 0$, $r = 0$, $Q(x) = Ax + B$; Т.е. $y_1 = Ax + B$;

$$y_1' = A; \quad y_1'' = 0;$$

$$Ax + B = x; \quad A = 1; \quad B = 0;$$

Итого: $y_1 = x$;

2. Для функции $f_2(x)$ решение ищем в виде: $y_2 = x^r e^{\alpha x} (Q_1(x) \cos \beta x + Q_2(x) \sin \beta x)$.

Анализируя функцию $f_2(x)$, получаем: $P_1(x) = 0$; $P_2(x) = -1$; $\alpha = 0$; $\beta = 2$; $r = 0$;

Таким образом, $y_2 = C \cos 2x + D \sin 2x$;

$$y_2' = -2C \sin 2x + 2D \cos 2x;$$

$$y_2'' = -4C \cos 2x - 4D \sin 2x;$$

$$-4C \cos 2x - 4D \sin 2x + C \cos 2x + D \sin 2x = -\sin 2x;$$

$$-3C \cos 2x - 3D \sin 2x = -\sin 2x$$

$$A = 0; \quad B = \frac{1}{3};$$

$$\text{Итого: } y_2 = \frac{1}{3} \sin 2x;$$

Т.е. искомое частное решение имеет вид: $y = y_1 + y_2 = \frac{1}{3} \sin 2x + x$;

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения:

$$y = \frac{1}{3} \sin 2x + x + C_1 \cos x + C_2 \sin x;$$

Рассмотрим примеры применения описанных методов.

Пример. Решить уравнение $y'' - 2y' + y = 3e^x$.

Составим характеристическое уравнение для соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения:

$$k^2 - 2k + 1 = 0; \quad k_1 = k_2 = 1;$$

Общее решение однородного уравнения: $y = C_1 e^x + C_2 x e^x$.

Теперь найдем частное решение неоднородного уравнения в виде:

$$y = x^r e^{\alpha x} Q(x)$$

$$\alpha = 1; \quad r = 2; \quad Q(x) = C;$$

$$y = Cx^2 e^x.$$

Воспользуемся методом неопределенных коэффициентов.

$$y' = 2Cxe^x + Cx^2e^x; \quad y'' = 2Ce^x + 2Cxe^x + 2Cxe^x + Cx^2e^x.$$

Подставляя в исходное уравнение, получаем:

$$2Ce^x + 4Cxe^x + Cx^2e^x - 4Cxe^x - 2Cx^2e^x + Cx^2e^x = 3e^x.$$

$$2C = 3; \quad C = \frac{3}{2}.$$

Частное решение имеет вид: $y = \frac{3}{2}x^2e^x$.

Общее решение линейного неоднородного уравнения: $y = C_1e^x + C_2xe^x + \frac{3}{2}x^2e^x$.

Пример. Решить уравнение $y''' - y' = x^2 - 1$.

Характеристическое уравнение: $k^3 - k = 0$; $k(k^2 - 1) = 0$; $k_1 = 0$; $k_2 = 1$; $k_3 = -1$;

Общее решение однородного уравнения: $y = C_1 + C_2e^x + C_3e^{-x}$.

Частное решение неоднородного уравнения: $y = x^r e^{\alpha x} Q(x)$.

$$\alpha = 0; \quad r = 1; \quad Q(x) = Ax^2 + Bx + C.$$

$$y = Ax^3 + Bx^2 + Cx$$

Находим производные и подставляем их в исходное неоднородное уравнение:

$$y' = 3Ax^2 + 2Bx + C; \quad y'' = 6Ax + 2B; \quad y''' = 6A;$$

$$6A - 3Ax^2 - 2Bx - C = x^2 - 1;$$

$$-3A = 1; \quad -2B = 0; \quad 6A - C = -1;$$

$$A = -\frac{1}{3}; \quad B = 0; \quad C = -1;$$

Получаем общее решение неоднородного дифференциального уравнения:

$$y = C_1 + C_2e^x + C_3e^{-x} - \frac{1}{3}x^3 - x.$$